УДК 681.31

И. В. Бойков, Н. П. Кривулин

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Аннотация.

Актуальность и цели. Работа посвящена параметрической идентификации динамических систем с распределенными параметрами, описываемыми разностными уравнениями. Исторически сложилось, что математические модели большинства физических явлений и технических систем описываются дифференциальными уравнениями (обыкновенными или в частных производных). Для определения коэффициентов этих уравнений возможно проведение только конечного числа измерений. Поэтому если коэффициенты уравнений являются функциями времени или координат, то возможно лишь их приближенное вычисление. В этой ситуации более естественно перейти к уравнениям в конечных разностях и рассматривать конечно-разностные модели. Кроме того, во многих областях физики и техники (аэродинамике, электродинамике, геофизике) изначально строятся дискретные модели. В связи с этим возникает необходимость в разработке методов параметрической идентификации динамических систем с распределенными параметрами, моделируемых разностными уравнениями. Насколько авторам известно, данная статья является первой работой, посвященной этой проблеме.

Материалы и методы. В основу исследования положено обобщение на разностные уравнения теоремы Бореля о решении одного класса интегральных уравнений.

Результаты. Предложен общий метод идентификации параметров динамических систем с распределенными параметрами, моделируемых разностными уравнениями.

Выводы. Метод может быть использован при параметрической идентификации динамических систем, математические модели которых описываются дифференциальными уравнениями в частных производных или разностными уравнениями с многими независимыми переменными.

Ключевые слова: распределенные параметры, идентификация, дискретные системы, импульсная переходная функция.

I. V. Boykov, N. P. Krivulin

IDENTIFICATION OF DISCRETE DYNAMIC SYSTEMS WITH DISTRIBUTED PARAMETERS

Abstract.

Background. The study is devoted to parametric identification of dynamic systems with distributed parameters, described by the difference equations. It was historically established that mathematical models of most physical phenomena and technical systems are described with differential equations (ordinary and with partial derivatives. To determine the coefficients of such equations it is possible to carry out only a finite number of measurements. Thus, if the equation coefficients are the functions of time or coordinates, it will be only possible to calculate them approximately. In such situation it is more natural to switch to equations in finite differences and to consider finite-difference models. More over, in many fields of physics and technology (aerodynamics, electrodynamics, geophysics) the discrete models are built initially. Due to this fact there is a necessity to develop methods of parametric identification of dynamic systems with distributed parameters, modeled by the difference equations. As far as the authors know, the present article is the first one considering the said problem.

Materials and methods. The research is based on generalization of the difference equations of the Borel theorem on solution of integral equations of one class.

Results. The authors suggest a general method of identification of parameters of dynamic systems with distributed parameters, modeled by the difference equations.

Conclusions. The method may be applied in parametric identification of dynamic systems, mathematical models of which are described by differential equations with partial derivatives or by difference equations with many independent variables.

Key words: distributed parameters, identification, discrete systems, impulse transition function.

В работе предлагается метод параметрической идентификации дискретных динамических систем с распределенными параметрами, описываемых разностными уравнениями

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(k)u(k+i,l)+\sum_{j=1}^{m} b_j(k)u(k,l+j)+c_0(k)u(k,l)=f(k,l)\ ,\ k,l=0,1,2,... \quad (1)$$

с начальными условиями

$$u(0,l)=0,\ u(i,l)=0,\ i=1,2,...,n-1;\ l=0,1,2,..., \quad (2)$$

и краевыми условиями

$$u(k,0)=0,\ u(k,j)=0,\ j=1,2,...,m-1;\ k=0,1,2,..., \quad (3)$$

где $f(k,l)$, $u(k,l)$ – входной и выходной сигналы соответственно; $k,l=0,1,2,...$ – дискретные переменные; $a_i(k)$, $i=1,2,...,n$; $b_j(k)$, $j=1,2,...,m$; $c_0(k)$, $k,l=0,1,2,...$ – коэффициенты, которые являются параметрами системы.

Основными математическими моделями, используемыми при описании систем с распределенными параметрами, являются дифференциальные уравнения в частных производных (например, уравнение теплопроводности, диффузии и т.д.). При этом измерение значений физического поля, которое характеризует протекание физического процесса, как правило, известно в дискретные значения времени и в определенной точке пространства. Поэтому от дифференциальных уравнений в частных производных переходят к разностным уравнениям вида (1). Коэффициенты в уравнении (1) характеризуют протекание физического процесса, их определение является актуальной задачей. В случае непрерывных систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, восстановление коэффициентов уравнений рассмотрено в работах [1–5].

В случае систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с дробной производной, восстановление коэффициентов уравнений рассмотрено в работах [6, 7]. Работы, посвященные восстановлению переменных коэффициентов разностных уравнений, моделирующих системы с распределенными параметрами, авторам не известны.

Постановка задачи. Требуется, подавая два тестовых сигнала $f_1(k,l)$, $f_2(k,l)$, $k,l=0,1,2,...$, и зная соответствующие выходные сигналы $u_1(k,l)$, $u_2(k,l)$, $k,l=0,1,2,...$, системы (1), найти параметры системы $a_i(k)$, $i=1,2,...,n;$ $b_j(k)$, $j=1,2,...,m;$ $c_0(k)$, $k=0,1,2,...$

Рассмотрим Z-преобразования для входного и выходного сигналов по переменной l, которые определяются равенствами [8]:

$$U(k,z_1)=Z\left[u(k,l)\right]=\sum_{l=0}^{\infty}u(k,l)z_1^{-l} \text{ – для выходного сигнала,}$$

$$F(k,z_1)=Z\left[f(k,l)\right]=\sum_{l=0}^{\infty}f(k,l)z_1^{-l} \text{ – для входного сигнала.}$$

Применив к уравнению (1) Z-преобразование по переменной l и учитывая начальные условия (2), имеем

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(k)U(k+i,z_1)+\left(b_m(k)z_1^m+b_{m\text{-}1}(k)z_1^{m-1}+...+c_0(k)\right)U(k,z_1)=F(k,z_1)\,.$$

Введя обозначение $a_0(k,z_1)=b_m(k)z_1^m+b_{m-1}(k)z_1^{m-1}+...+c_0(k)$, приходим к разностному уравнению

$$\sum_{i=1}^{n}a_i(k)U(k+i,z_1)+a_0(k,z_1)U(k,z_1)=F(k,z_1) \qquad (4)$$

с начальными условиями

$$U(0,z_1)=0,\;\; U(k,z_1)=0,\;\; k=1,2,...,n-1.$$

Уравнение (4) является разностным уравнением; z_1 будем рассматривать как параметр. Рассмотрим виртуальную динамическую систему, описываемую уравнением (4), где z_1 – параметр; $F(k,z_1)$, $U(k,z_1)$ – входной и выходной сигналы соответственно; $a_i(k)$, $i=1,2,...,n;$ $b_j(k)$, $j=1,2,...,m;$ $c_0(k)$ – параметры системы, подлежащие определению. Систему, описываемую уравнением (4), будем рассматривать как параметрическую систему, а импульсную переходную функцию $h(k,l,z_1)$ системы (4) – как параметрическую импульсную переходную функцию.

Поставленную задачу разобьем на две задачи.

Первая задача. Требуется, подавая два тестовых сигнала $f_1(k,l)$, $f_2(k,l)$ и зная соответствующие выходные сигналы $u_1(k,l)$, $u_2(k,l)$ системы (1), определить импульсную переходную функцию системы (4).

Решение. Определение импульсной переходной функции системы (4) основано на следующей теореме.

Теорема. Пусть последовательности $x(k)$, $y(k)$, $k=0,1,2,...$, связаны формулой

$$y(k)=\sum_{l=0}^{k} g(k,l)x(l)\,,\; k=0,1,2,\ldots, \tag{5}$$

Z-преобразование последовательности $g(k,l)$ по переменной k имеет вид $G(z,l)=Z\left[g(k,l)\right]=\sum_{k=0}^{\infty} g(k,l)z^{-k}$ и удовлетворяет условию

$$G(z,l)=\hat{G}(z)\left[q(z)\right]^{-l}, \tag{6}$$

где $\hat{G}(z)$, $q(z)$ – аналитические функции.

Тогда

$$Y(z)=\hat{G}(z)X(q(z))\,. \tag{7}$$

Доказательство. Z-преобразование выражения (5) имеет вид $Y(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{\infty} g(k,l)x(l)z^{-k}\right)$. Меняя порядок суммирования (эта возможность следует [9] из сходимости последовательностей $g(k,l)$, $y(k)$ по k,l), получим

$$Y(z)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(x(l)\sum_{k=0}^{\infty} g(k,l)z^{-k}\right)=\sum_{l=0}^{\infty} x(l)\hat{G}(z)\left[q(z)\right]^{-l}=$$

$$=\hat{G}(z)\sum_{l=0}^{\infty} x(l)\left[q(z)\right]^{-l}=\hat{G}(z)X(q(z))\,,$$

откуда следует справедливость (7).

Следствие. В случае, когда последовательность $g(k,l)$ инвариантна к сдвигу, т.е. имеет вид $g(k,l)=g(k-l)$, получаем известную теорему о Z-преобразовании свертки двух последовательностей [1, 8, 9], которая определяется выражением

$$y(k)=\sum_{l=0}^{k} g(k-l)x(l)\,. \tag{8}$$

Пусть

$$X(z)=Z\left[x(k)\right]=\sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k}\,,\; Y(z)=Z\left[y(k)\right]=\sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k}\,,$$

$$G(z)=Z\left[g(k)\right]=\sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^{-k}\,.$$

Тогда Z-преобразование (8) имеет вид

$$Y(z)=G(z)X(z)\,. \tag{9}$$

Действительно, так как $Z\left[g(k)\right]=G(z)$, то по теореме смещения $Z\left[g(k-l)\right]=G(z)z^{-l}$, следовательно удовлетворяет условию (6), где $q(z)=z$, т.е. из (7) следует (9).

Приведенная теорема является аналогом теоремы Бореля для непрерывных систем, которая рассмотрена в работе [10]. Там же предложен метод идентификации непрерывных динамических систем, использующий теорему Бореля.

Следуя [11], представим связь вход–выход системы (4) в виде выражения

$$U(k,z_1)=\sum_{l=0}^{\infty}h(k,l,z_1)F(k,z_1) \tag{10}$$

для систем, описываемых разностными уравнениями вида (4) с переменными параметрами, и

$$U(k,z_1)=\sum_{l=0}^{\infty}h(k-l,z_1)F(k,z_1) \tag{11}$$

для систем, инвариантных к сдвигу, которые описываются разностными уравнениями с постоянными параметрами.

Здесь $U(k,z_1)$ – выходной сигнал; $F(k,z_1)$ – входной сигнал; $h(k,l,z_1)$ – импульсная переходная функция системы (4).

Для уравнения (10) утверждение данной теоремы примет следующий вид.

Пусть Z-преобразование по переменной l функции $u(k,l)$ есть $U(k,z_1)$, а функции $f(k,l)$ – $F(k,z_1)$; пусть Z-преобразования по переменной k функций $U(k,z_1)$ и $F(k,z_1)$ есть $\hat{U}(z_2,z_1)$, $\hat{F}(z_2,z_1)$.

Пусть Z-преобразование функции $h(k,l,z_1)$ по переменной k имеет вид $Z\left[h(k,l,z_1)\right]=\sum\limits_{k=0}^{\infty}h(k,l,z_1)z_2^{-k}=H(z_2,l,z_1)$ и удовлетворяет следующему условию: Z-преобразование по переменной k имеет вид

$$H(z_2,l,z_1)=\hat{H}(z_2,z_1)\left[q(z_2)\right]^{-l}, \tag{12}$$

где $q(z_2)$ и $\hat{H}(z_2,z_1)$ – некоторые аналитические функции.

Тогда Z-преобразование уравнения (10) по переменной k будет иметь вид

$$\hat{H}(z_2,z_1)\hat{F}(q(z_2),z_1)=\hat{U}(z_2,z_1). \tag{13}$$

Подавая на вход системы (1) два тестовых входных сигнала $u_1(k,l)$, $u_2(k,l)$, получим соответствующие выходные сигналы $f_1(k,l)$, $f_2(k,l)$. Определим их Z-преобразования по обеим переменным: $\hat{U}_1(z,p)$, $\hat{U}_2(z,p)$, $\hat{F}_1(z,p)$, $\hat{F}_2(z,p)$.

Воспользовавшись (13), получим систему уравнений относительно функций $H(z_2, z_1)$, $q(z_2)$:

$$\begin{cases} \hat{H}(z_2, z_1)\hat{F}_1(q(z_2), z_1) = \hat{U}_1(z_2, z_1), \\ \hat{H}(z_2, z_1)\hat{F}_2(q(z_2), z_1) = \hat{U}_2(z_2, z_1). \end{cases} \quad (14)$$

Решая данную систему, находим функции $H(z_2, z_1)$, $q(z_2)$.

Тогда функция $h(k, l, z_1)$ определяется как обратное Z-преобразование формулой

$$h(k,l,z_1) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C H(z_2,l,z_1) z_2^{k-1} dz_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C \hat{H}(z_2,z_1)\left[q(z_2)\right]^{-l} z_2^{k-1} dz_2, \; k,l = 0,1,... \quad (15)$$

Вычисляя интеграл в правой части формулы по квадратурным формулам, получаем приближенное значение импульсной переходной функции.

Отметим, что вычисление контурного интеграла в выражениях (15) является достаточно трудоемкой задачей. Поэтому для нахождения обратного Z-преобразования можно воспользоваться следующей вычислительной схемой [1], основанной на методе коллокаций.

Рассмотрим Z-преобразование для функции $h(k, l, z_1)$:

$$Z\left[h(k,l,z_1)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} h(k,l,z_1) z_2^{-k} = H(z_2,l,z_2), \; l = 0,1,... \quad (16)$$

Рассмотрим (16) как уравнения относительно функции $h(k, l, z_1)$. Применяя метод редукции и учитывая физическую реализуемость импульсной переходной функции ($h(k, l, z_1) = 0$ при $k < l$), уравнение (16) при каждом значении $l = 0,1,...,N$ представим в виде

$$\sum_{k=l}^{N} h(k,l,z_1) z_2^{-k} = H(z_2,l,z_1), l = 0,1,...,N, \quad (17)$$

где N – достаточно большое число.

В уравнении (17) для каждого фиксированного значения $l = 0,1,2,...N$ на единичной окружности $\gamma = \{z, |z| = 1\}$ выбираем $(N - l + 1)$ равностоящую точку $z_2^{(k)}, k = 0,1,..,N - l$, и приравняем левые и правые части уравнения (17) в этих точках. В результате приходим к $N + 1$ системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=l}^{N} h(k,l,z_1)\left(z_2^{(\nu)}\right)^{-k} = H(z_2^{(\nu)},l,z_1), \nu = 0,1,...,N-l, \; l = 0,1,...,N. \quad (18)$$

Система (18) однозначно разрешима, так как определитель l-й системы $(N-l+1)$ порядка $(l=0,1,...,N)$, есть определитель Вандермонда [5], который равен

$$\Delta=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\left(z_2^{(0)}\right)^l} & \dfrac{1}{\left(z_2^{(0)}\right)^{l+1}} & \cdots & \dfrac{1}{\left(z_2^{(0)}\right)^N} \\ \dfrac{1}{\left(z_2^{(1)}\right)^l} & \dfrac{1}{\left(z_2^{(1)}\right)^{l+1}} & \cdots & \dfrac{1}{\left(z_2^{(1)}\right)^N} \\ . & . & \cdots & . \\ \dfrac{1}{\left(z_2^{(N-i)}\right)^l} & \dfrac{1}{\left(z_2^{(N-i)}\right)^{l+1}} & \cdots & \dfrac{1}{\left(z_2^{(N-i)}\right)^N} \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\left(z_2^{(0)}\cdots z_2^{(N-i)}\right)^l}\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{1}{z_2^{(0)}} & \cdots & \dfrac{1}{\left(z_2^{(0)}\right)^{N-l}} \\ 1 & \dfrac{1}{z_2^{(1)}} & \cdots & \dfrac{1}{\left(z_2^{(1)}\right)^{N-l}} \\ . & . & \cdots & . \\ 1 & \dfrac{1}{z_2^{(N-i)}} & \cdots & \dfrac{1}{\left(z_2^{(N-i)}\right)^{N-l}} \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\left(z_2^{(0)}\cdots z_2^{(N-i)}\right)^l}\prod_{i>j}\left(\frac{1}{z_2^{(i)}}-\frac{1}{z_2^{(j)}}\right)\neq 0.$$

Решая систему (18) при каждом значении $l=0,1,2,...,N,$ находим элементы последовательности $\{h(k,l,z_1)\}$, $l=0,1,...,N;k=l,1,...,N.$

Вторая задача. Требуется, зная импульсную переходную функцию $h(k,l,z_1)$ измерительного преобразователя (4), найти параметры системы $a_i(k),\ i=1,2,...,n;\ b_j(k),\ j=1,2,...,m;\ c_0(k),\ k=1,2,...$

Решение. Для уравнения (4) рассмотрим эквивалентное разностное уравнение

$$B_n(k,z_1)\Delta^n U(k,z_1)+B_{n-1}(k,z_1)\Delta^{n-1}U(k,z_1)+...$$
$$...+B_0(k,z_1)U(k,z_1)=F(k,z_1), \qquad (19)$$

где $\Delta^n U(k,z_1)$ – разности n-го порядка:

$$\Delta U(k,z_1)=U(k+1,z_1)-U(k,z_1),$$

$$\Delta^2 U(k,z_1)) = \Delta(\Delta U(k+1,z_1) - U(k,z_1)) = U(k+2,z_1) - 2U(k+1,z_1) + U(k,z_1),$$

$$...$$

$$\Delta^n U(k,z_1) = \Delta(\Delta^{n-1} U(k+1,z_1) - U(k,z_1)) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^{n-m} C_n^m U(k+m,z_1).$$

Следуя [12], можно показать, что коэффициенты уравнений (4) и (19) связаны соотношением

$$a_n(k) = B_n(k,z_1);$$

$$a_{n-1}(k) = C_{n-1}^{n-1} B_{n-1}(k,z_1) - C_n^{n-1} B_n(k,z_1) = B_{n-1}(k,z_1) - nB_n(k,z_1),$$

$$...$$

$$a_0(k) = B_0(k,z_1) - B_1(k,z_1) + B_2(k,z_1) - ...$$

$$... + (-1)^n B_n(k,z_1) = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m B_m(k,z_1). \quad (20)$$

Поэтому для определения коэффициентов $a_0(k)$, $a_1(k)$, ..., $a_n(k)$; $k = 1,2,...$, уравнения (4) достаточно найти коэффициенты $B_0(k,z_1)$, $B_1(k,z_1)$, ..., $B_n(k,z_1)$; $k = 1,2,...$, уравнения (19).

Для определения коэффициентов $B_0(k,z_1)$, $B_1(k,z_1)$, ..., $B_n(k,z_1)$; $k = 1,2,...$, уравнения (19) по известной импульсной переходной функции $h(k,l,z_1)$ найдем виртуальные входные сигналы $F_i(k,z_1)$, $k = 1,2,...$, $i = 1,2,...,n+1$, такие, что им соответствуют выходные сигналы

$$U_i(k,z_1) = k^{(i)} V_i(z_1), i = 0,...,n, \quad (21)$$

где

$$k^{(0)} = 1(k) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad k \ge 0, \\ 0 & \text{при} \quad k < 0, \end{cases} \quad k^{(1)} = \begin{cases} k & \text{при} \quad k \ge 0, \\ 0 & \text{при} \quad k < 0, \end{cases}$$

$$k^{(2)} = \begin{cases} k(k-1) & \text{при} \quad k \ge 1, \\ 0 & \text{при} \quad k < 1, \end{cases} \ ... \ k^{(n)} = \begin{cases} k(k-1)...(k-n+1) & \text{при} \quad k \ge n, \\ 0 & \text{при} \quad k < n \end{cases}$$

есть обобщенные степенные функции [12, 13], которые удовлетворяют условиям:

$$\Delta k^{(n)} = nk^{(n-1)},$$

$$\Delta^2 k^{(n)} = n(n-1)k^{(n-2)},$$

$$...$$

$$\Delta^n k^{(n)} = n! k^{(0)} = n! 1(k),$$

$$\Delta^{n+1}k^{(n)} = 0 \quad \text{при} \quad k > 0. \tag{22}$$

Используя импульсную переходную функцию $h(k,l,z_1)$, представим каждый из выходных сигналов (21) в виде уравнений:

$$\begin{cases} U_1(k,z_1) = \sum\limits_{l=0}^{k} H(k,l,z_1)F_1(l,z_1), \\ U_2(k,z_1) = \sum\limits_{l=0}^{k} H(k,l,z_1)F_2(l,z_1), \\ \ldots \\ U_{n+1}(k,z_1) = \sum\limits_{l=0}^{k} H(k,l,z_1)F_{n+1}(l,z_1). \end{cases} \tag{23}$$

Из решения системы уравнений (23) получим последовательности виртуальных входных сигналов $F_i(k,z_1)$, $k = 1,2,...$, $i = 1,2,...,n+1$, для каждой заданной последовательности выходных сигналов (21).

Подставляя (21) и решение системы (23) в (19) и учитывая (22), получим систему линейных уравнений относительно коэффициентов $B_0(k,z_1)$, $B_1(k,z_1)$, ..., $B_n(k,z_1)$; $k = 1,2,...$:

$$\begin{cases} B_0(k,z_1) = F_1(k,z_1), \\ B_1(k,z_1) = F_2(k,z_1) - B_0(k,z_1)k^{(1)}, \\ B_2(k,z_1) = \dfrac{1}{2!}\Big(F_3(k,z_1) - 2B_1(k,z_1)k^{(1)} - B_0(k,z_1)k^{(2)}\Big), \\ \ldots \\ B_n(k,z_1) = \dfrac{1}{n!}\Big(F_{n+1}(k,z_1) - n(n-1)\cdot\ldots\cdot 2B_n(k,z_1)k^{(1)}) - \ldots \\ \qquad \ldots - B_1(k,z_1)\Delta\Big(k^{(n)}\Big) - B_0(k,z_1)k^{(n)}\Big). \end{cases}$$

Значения искомых коэффициентов исходного разностного уравнения (4) найдем из соотношений (20).

Для определения параметров $b_j(k)$, $k = 1,2,...,m$; $c_0(k)$ уравнения (1) воспользуемся вычисленным коэффициентом $a_0(k,z_1)$, для которого запишем выражение

$$\Big(b_m(k)z_1^m + b_{m-1}(k)z_1^{m-1} + \ldots + b_1(k)z_1 + c_0(k)\Big) = a_0(k,z_1). \tag{24}$$

Аппроксимируя правую часть уравнения (24) полиномом степени m по степеням z_1

$$a_0(k,z_1) = A_m(k)z_1^m + A_{m-1}(k)z_1^{m-1} + \ldots + A_1(k)z_1 + A_0(k) \tag{25}$$

и приравнивая коэффициенты полинома и выражения слева в уравнении (24) при одинаковых степенях z_1, вычислим искомые значения параметров

$$b_i(k) = A_i(k), \;\; i = 1, 2, ..., m; \;\; c_0(k) = A_0(k).$$

Таким образом, восстановление коэффициентов исходного разностного уравнения (1) сводится к восстановлению параметрической импульсной переходной функции для уравнения (4), которая определяется по двум тестовым сигналам методом, описанном в первом разделе. Отметим, что при известной импульсной переходной функции системы для восстановления коэффициентов разностного уравнения не требуется проводить реальные испытания.

Пример. Рассмотрим измерительный преобразователь, функционирование которого описывается разностным уравнением

$$a(k)u(k+1,l) + b(k)u(k,l+1) = f(k,l), \tag{26}$$

где $f(k,l)$, $u(k,l)$ – входной и выходной сигналы соответственно; $a(k)$, $b(k)$ – подлежащие определению коэффициенты, характеризующие работу измерительного преобразователя. Пусть $a(k) = 2$, $b(k) = 3$. Требуется найти коэффициенты уравнения (26), зная два тестовых входных и соответствующих им выходных сигнала.

Применив Z-преобразование к уравнению (26) по переменной l, получим

$$a(k)U(k+1,z_1) + b(k)z_1U(k,z_1) = F(k,z_1).$$

Введя обозначение $a_0(k,z_1) = b(k)z_1$, предыдущее равенство запишем в виде

$$a(k)U(k+1,z_1) + a_0(k,z_1)U(k,z_1) = F(k,z_1). \tag{27}$$

Определим импульсную переходную функцию $h(k,l,z_1)$ системы, описываемую уравнением (27).

В качестве входных сигналов возьмем

$$\begin{cases} f_1(k,l) = 3k + 2l + 5kl, \\ f_2(t,x) = 12 \cdot 2^{lk} \cdot 3^k - 8 \cdot 2^l - 9 \cdot 3^k + 5, \end{cases}$$

им соответствуют выходные сигналы:

$$\begin{cases} u_1(k,l) = kl, \\ u_2(t,x) = \left(2^l - 1\right)\left(3^k - 1\right). \end{cases}$$

Z-преобразование функций $u_1(k,l), u_2(k,l), f_1(k,l), f_2(k,l)$ по переменной l имеет вид:

– для входных сигналов:

$$F_1(t,p) = \frac{z_1\left(2k + 3kz_1 + 2\right)}{\left(z_1 - 1\right)^2}, \;\; F_1(t,p) = \frac{z_1\left(3^{k+1}z_1 - 3z_1 + 2 \cdot 3^{k+1} - 2\right)}{\left(z_1 - 1\right)\left(z_1 - 2\right)}; \tag{28}$$

– для выходных сигналов:

$$U_1(k,l)=\frac{kz_1}{(z_1-1)^2},\ U_2(t,x)=\frac{z_1\left(3^k-1\right)}{(z_1-1)(z_1-2)}. \tag{29}$$

Z-преобразования выражений (28), (29) по переменной k для имеют вид

$$\hat{F}_1(z_2,z_1)=\frac{z_2z_1(2z_2+3z_1)}{(z_2-1)^2(z_1-1)^2},$$

$$\hat{F}_2(z_2,z_1)=\frac{2z_2z_1(2z_2+3z_1)}{(z_2-1)(z_2-3)(z_1-1)(z_1-2)}, \tag{30}$$

$$\hat{U}_1(z_2,z_1)=\frac{z_2z_1}{(z_2-1)^2(z_1-1)^2},$$

$$\hat{U}_2(z_2,z_1)=\frac{2z_2z_1}{(z_2-1)(z_2-3)(z_1-1)(z_1-2)}. \tag{31}$$

Подставляя (30), (31) в систему уравнений (14) , получим

$$\begin{cases}\hat{H}(z_2,z_1)\dfrac{q(z_2)z_1(2q(z_2)+3z_1)}{(q(z_2)-1)^2(z_1-1)^2}=\dfrac{z_2z_1}{(z_2-1)^2(z_1-1)^2},\\ \hat{H}(z_2,z_1)\dfrac{2q(z_2)z_1(2q(z_2)+3z_1)}{(q(z_2)-1)(q(z_2)-3)(z_1-1)(z_1-2)}=\\ \qquad\qquad=\dfrac{2z_2z_1}{(z_2-1)(z_2-3)(z_1-1)(z_1-2)},\end{cases}$$

откуда $\hat{H}(z_2,z_1)=\dfrac{1}{2z_2+3z_1}$, $q(z_2)=z_2$, $H(z_2,l,z_1)=\dfrac{1}{2z_2+3z_1}z_2^{-l}$.

Найдем обратное Z-преобразование по переменной z_2 для функции $\hat{H}(z_2,z_1)=\dfrac{1}{2z_2+3z_1}$. Разложим $\hat{H}(z_2,z_1)$ в ряд Лорана:

$$\hat{H}(z_2,z_1)=\frac{1}{2z_2+3z_1}=\frac{1}{2z_2}\frac{1}{1+\left(\frac{3z_1}{2}\right)z_2^{-1}}=$$

$$=\frac{1}{2z_2}\left(1-\left(\frac{3z_1}{2}\right)z_2^{-1}+\left(\frac{3z_1}{2}\right)^2z_2^{-2}-\ldots+(-1)^k\left(\frac{3z_1}{2}\right)^kz_2^{-k}+\ldots\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2}z_2^{-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{3z_1}{2}\right)z_2^{-2}+\frac{1}{2}\left(\frac{3z_1}{2}\right)^2z_2^{-3}-\ldots+(-1)^{k-1}\frac{1}{2}\left(\frac{3z_1}{2}\right)^{k-1}z_2^{-k}+\ldots\right),$$

отсюда обратное Z-преобразование для функции $\hat{H}(z_2, z_1)$ по переменной z_2 будет

$$\hat{h}(k, z_1) = \begin{cases} 0 \text{ при } k = 0, \\ (-1)^{k-1} \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{3z_1}{2} \right)^{k-1} \text{ при } k = 1, 2, ... \end{cases}$$

По теореме смещения обратное Z-преобразование для функции $H(z_2, l, z_1) = \dfrac{1}{2z_2 + 3z_1} z_2^{-l}$ будет определяться равенством

$$Z^{-1}\left[H(z_2, l, z_1)\right] = Z^{-1}\left[\hat{h}(k - l, z_1)\right],$$

т.е.

$$h(k, l, z_1) = h(k - l, z_1) = \begin{cases} 0 \text{ при } k = l, \\ (-1)^{k-l-1} \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{3z_1}{2} \right)^{k-1-1} \text{ при } k > l, k = 1, 2, ...; \end{cases}$$

$$U(k, z_1) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{k-l-1} \left(\frac{3z_1}{2} \right)^{k-l-1} F(l, z_1).$$

Для определения коэффициентов уравнения (27) рассмотрим эквивалентное конечно-разностное уравнение:

$$B_1(k, z_1)\Delta U(k+1, z_1) + B_0(k, z_1)U(k, z_1) = F(k, z_1). \tag{32}$$

Коэффициенты уравнений связаны соотношениями (20) и в данном случае имеют вид

$$\begin{cases} a(k, z_1) = B_1(k, z_1), \\ a_0(k, z_1) = B_0(k, z_1) - B_1(k, z_1). \end{cases} \tag{33}$$

Для найденной импульсной переходной функции $h(k - l, z_1)$ системы (27) вычислим виртуальные входные сигналы $F_1(k, z_1), F_2(k, z_1)$ так, чтобы соответствующие выходные сигналы имели вид

$$U_1(k, z_1) = \begin{cases} 1(k)v_1(z_1), \ k \geq 0, \\ 0, \ k < 0, \end{cases} \quad U_2(t, p) = \begin{cases} kv_2(z_1), \ k \geq 0, \\ 0, \ k < 0, \end{cases} \tag{34}$$

где $v_1(z_1)$, $v_2(z_1)$ есть некоторые аналитические функции, для которых определено обратное Z-преобразование.

Искомые последовательности $F_1(k, z_1)$, $F_2(k, z_1)$ найдем из решения уравнений:

$$1(k)v_1(z_1) = \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{k-l-1} \left(\frac{3z_1}{2} \right)^{k-l-1} F(l, z_1),$$

$$kv_2(z_1)=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{k-1}(-1)^{k-l-1}\left(\frac{3z_1}{2}\right)^{k-l-1}F(l,z_1).$$

Найдем решение первого уравнения:

– при $k=1$ получим $2v_1(z_1)=F(0,z_1)$;

– при $k=2$ получим $2v_1(z_1)=-\left(\frac{3z_1}{2}\right)F(0,z_1)+F(1,z_1)$, откуда

$$F(1,z_1)=2v_1(z_1)+3z_1v_1(z_1),\ \text{или}\ F(1,z_1)=\left(2+3z_1\right)v_1(z_1);$$

– при $k=3$ получим $2v_1(z_1)=\left(\frac{3z_1}{2}\right)^2F(0,z_1)-\left(\frac{3z_1}{2}\right)F(1,z_1)+F(2,z_1)$, откуда

$$F(2,z_1)=2v_1(z_1)-\left(\frac{3z_1}{2}\right)^2 2+\left(\frac{3z_1}{2}\right)\left(2+3z_1\right)v_1(z_1),\ \text{или}\ F(2,z_1)=\left(2+3z_1\right)v_1(z_1),$$

и т.д., $F(k,z_1)=\left(2+3z_1\right)v_1(z_1)$.

Решением первого уравнения будет последовательность

$$F(k,z_1)=\begin{cases}2 & \text{при}\quad k=0\\ \left(2+3z_1\right)v_1(z_1) & \text{при}\quad k=1,2,...\end{cases}\tag{35}$$

Найдем решение второго уравнения:

– при $k=1$ получим $2v_2(z_1)=F(0,z_1)$;

– при $k=2$ получим $2\cdot 2v_2(z_1)=-\left(\frac{3z_1}{2}\right)F(0,z_1)+F(1,z_1)$, откуда

$$F(1,z_1)=2\cdot 2v_2(z_1)+3z_1v_2(z_1),\ \text{или}\ F(1,z_1)=\left(2\cdot 2+3z_1\right)v_2(z_1);$$

– при $k=3$ получим $2\cdot 3v_2(z_1)=\left(\frac{3z_1}{2}\right)^2F(0,z_1)-\left(\frac{3z_1}{2}\right)F(1,z_1)+F(2,z_1)$, откуда

$$F(2,z_1)=2\cdot 3v_2(z_1)-\left(\frac{3z_1}{2}\right)^2 2+\left(\frac{3z_1}{2}\right)\left(2\cdot 2+3z_1\right)v_2(z_1),$$

$$\text{или}\ F(2,z_1)=\left(2\cdot 3+2\cdot 3z_1\right)v_1(z_1),$$

и т.д., $F(k,z_1)=\left(2k+(k-1)3z_1\right)v_1(z_1)$, $k=1,2,...$, или заменяя k на $k-1$, получим решение второго уравнения:

$$F(k,z_1)=\left(2k+3kz_1+2\right)v_1(z_1), k=0,1,2,...\tag{36}$$

Подставляя (34), (35), (36) в (32), получим систему уравнений

$$\begin{cases}B_0(k,z_1)=2+3z_1,\\ B_1(k,z_1)+B_0(k,z_1)k=2k+3kz_1+2,\end{cases}$$

$k = 1, 2, ...$, отсюда $B_0(k) = 2 + 3z_1$, $B_1(k) = 2, k = 1, 2, ...$

Используя соотношение (30), найдем коэффициенты $a_0(k, z_1), a(k)$:

$$\begin{cases} a(k) = B_1(k) = 2, \\ a_0(k, z_1) = B_0(k) - B_1(k) = 3z_1. \end{cases}$$

Следовательно, коэффициенты уравнения (20) равны $a(k) = 2$, $b(k) = 3$, что совпадает с точными значениями.

Список литературы

1. **Бойков, И. В.** Аналитические методы идентификации динамических систем : учеб. пособие / И. В. Бойков. – Пенза : Изд-во Пенз. политехн. ин-та, 1992. – 112 с.
2. **Бойков, И. В.** Восстановление параметров линейных систем, описываемых дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Измерительная техника. – 2013. – № 4. – С. 11–14.
3. **Виглин, С. И.** Переходные процессы в системах с переменными параметрами / С. И. Виглин. – М. : Сов. радио, 1971. – 184 с.
4. Методы классической и современной теории автоматического управления : учеб. пособие. Т. 1–5 / под ред. К. А. Пупкова, Н. Д. Егупова. – М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004.
5. **Проскуряков, И. В.** Сборник задач по линейной алгебре / И. В. Проскуряков. – 7-е изд. – М. : Наука. Гл. ред. физматлит, 1984. – 336 с.
6. **Бойков, И. В.** Параметрическая идентификация систем, математические модели которых описываются дифференциальными уравнениями с производными дробных порядков / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Метрология. – 2013. – № 9. – С. 3–17.
7. **Бойков, И. В.** Параметрическая идентификация эредитарных систем с распределенными параметрами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2013. – № 2 (26). – С. 120–129.
8. **Солонина, А. И.** Основы цифровой обработки сигналов : курс лекций / А. И. Солонина, Д. А. Улахович, С. М. Арбузов, Е. Б. Соловьева. – Изд. 2-е, испр. и перераб. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 768 с.
9. **Смирнов, В. И.** Курс высшей математики. Т. I / В. И. Смирнов ; предисл. Л. Д. Фаддеева ; предисл. и примеч. Е. А. Грининой. – 24-е изд. – СПб. : БХВ-Петербург, 2008. – 615 с.
10. **Бойков, И. В.** Определение временных характеристик линейных систем с распределенными параметрами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Метрология. – 2012. – № 8. – С. 3–14.
11. **Оппенгейм, А. В.** Цифровая обработка сигналов : пер. с англ. / А. В. Оппенгейм, Р. В. Шафер ; под ред. С. Я. Шаца. – М. : Связь, 1979. – 416 с.
12. **Гельфонд, А. О.** Исчисление конечных разностей / А. О. Гельфонд. – М. : ГИФМЛ, 1959. – 400 с.
13. **Мартыненко, В. С.** Операционное исчисление : учеб. пособие / В. С. Мартыненко. – 4-е изд., перераб. и доп. – К. : Выща шк., 1990. – 359 с.

References

1. Boykov I. V. *Analiticheskie metody identifikatsii dinamicheskikh sistem: ucheb. posobie* [Analytical methods of dynamic system identification: tutorial]. Penza: Izd-vo Penz. politekhn. in-ta, 1992, 112 p.
2. Boykov I. V., Krivulin N. P. *Izmeritel'naya tekhnika* [Measurement technology]. 2013, no. 4, pp. 11–14.

3. Viglin S. I. *Perekhodnye protsessy v sistemakh s peremennymi parametrami* [Transition processes in systems with variable parameters]. Moscow: Sov. radio, 1971, 184 p.
4. *Metody klassicheskoy i sovremennoy teorii avtomaticheskogo upravleniya: ucheb. posobie. T. 1–5* [Methods of classical and modern theory of automatic control: tutorial. Volumes 1-5]. Eds. K. A. Pupkov, N. D. Egupov. Moscow: Izd-vo MGTU im. N. E. Baumana, 2004.
5. Proskuryakov I. V. *Sbornik zadach po lineynoy algebre* [Collected problems on linear algebra]. Moscow: Nauka. Gl. red. fizmatlit, 1984, 336 p.
6. Boykov I. V., Krivulin N. P. *Metrologiya* [Metrology]. 2013, no. 9, pp. 3–17.
7. Boykov I. V., Krivulin N. P. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Tekhnicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2013, no. 2 (26), pp. 120–129.
8. Solonina A. I., Ulakhovich D. A., Arbuzov S. M., Solov'eva E. B. *Osnovy tsifrovoy obrabotki signalov: Kurs lektsiy*. [Basic digital signal processing]. Saint Petersburg: BKhV-Peterburg, 2005, 768 p.
9. Smirnov V. I. *Kurs vysshey matematiki. T. I* [Course of higher mathematics. Volume 1]. Saint Petersburg: BKhV-Peterburg, 2008, 615 p.
10. Boykov I. V., Krivulin N. P. *Metrologiya* [Metrology]. 2012, no. 8, pp. 3–14.
11. Oppengeym A. V., Shafer R. V. *Tsifrovaya obrabotka signalov: per. s angl.* [Digital signal processing: translation from English]. Moscow: Svyaz', 1979, 416 p.
12. Gel'fond A. O. *Ischislenie konechnykh raznostey* [Claculation of finite differences]. Moscow: GIFML, 1959, 400 p.
13. Martynenko V. S. *Operatsionnoe ischislenie: ucheb. posobie* [Operational calculus: tutorial]. Kiev: Vyshcha shk., 1990, 359 p.

Бойков Илья Владимирович
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: boikov@pnzgu.ru

Boykov Il'ya Vladimirovich
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of sub-department of higher and applied mathematics, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Кривулин Николай Петрович
кандидат технических наук, доцент, кафедра высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: krivulin@bk.ru

Krivulin Nikolay Petrovich
Candidate of engineering sciences, associate professor, sub-department of higher and applied mathematics, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

УДК 681.31

Бойков, И. В.

Идентификация дискретных динамических систем с распределенными параметрами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 2 (30). – С. 34–48.